§2.3 初等多值函数

一. 幂函数 $w=z^n$（n为正整数）的单叶性区域

1. 定义

Def 1. 若$f(z)$在区域D上满足$z_1\neq z_2\Rightarrow f(z_1)\neq f(z_2)$，则称 $f(z)$是D上的单叶函数.

单叶函数 $\Longleftrightarrow$ 双方单值对应 $\Longleftrightarrow$ 像与原像一一对应

Def 2. 若$f(z)$在区域D上单叶，则称D是f的单叶性区域

2. $w=z^n$ 的单叶性区域

(1) $w=z^n=\cancel{\ }r^n e^{in\theta}=\rho e^{i\varphi}$

变换$w=z^n$将z平面上张角为α ($\alpha<\frac{2\pi}{n}$) 的角域变为w平面张角为$n\alpha$的角域.

例如：z平面上的角域T_k：$\frac{2k\pi}{n}-\frac{\pi}{n}<\theta<\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}$ 变为w平面去掉负实轴. 类似取$T_k=\frac{2k\pi}{n}<\theta<\frac{2k\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}$

一般地，T_k均是z^n的单叶性区域.

z平面上，若区域D上任意同心圆周上两点辐角之差小于$\frac{2\pi}{n}$，这种区域均为$w=\cancel{\ }z^n$的单叶性区域.

Rem. 上面两种单叶性区域T_k经常使用.

二. 多值函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 的单叶分支函数

1. 变换$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{2k\pi+\theta}{n}i}=\rho e^{i\varphi}$将$z$平面上张角为$\alpha$的角域变为$w$平面上张角为$\frac{\alpha}{n}$的角域.

例如，w平面上T_k：$\frac{2k\pi}{n}-\frac{\pi}{n}<\varphi<\frac{2k\pi}{n}+\frac{\pi}{n}$对应由$z$平面上去掉负实轴的角域，类似也可有$T_k$：$\frac{2k\pi}{n}<\varphi<\frac{2k\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}$的对应.

一般地，多值函数可以分出n个单值函数：

$w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{2k\pi+\theta}{n}i}$，$k=0,1,\cdots,n-1$ 在z平面去掉某一射线到对应 T_k 上是单叶函数.

若将z平面去掉一条连接 $z=0$ 到 $z=\infty$ 的简单曲线，则多值函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 可以分成n个单叶分支.

2. 多值函数的支点与支割线

Def. z平面上的动点z绕 $z=0$ 一周回到原位置，其在变换 $w=\sqrt[n]{z}$ 下像曲线从一支变为另一支，在每一支中都回不到原位置，则称 $z=0$ 为支点.

显然 $z=\infty$ 也满足支点定义，故 $w=\sqrt[n]{z}$ 有两个支点：$z=0$，$z=\infty$

Def. 连接所有支点的简单曲线称为支割线.

Rem. (1) 支割线将z平面割破后所得区域，这时多值函数可分出单叶分支.

(2) $w=\sqrt{(z-1)(z-2)}$ 的支点：$z=1,z=2$

$w=\sqrt[3]{(z-1)(z-2)}$ 的支点：$z=1,z=2,z=\infty$

三、$w=\sqrt[n]{z}$ 的分支函数的解析性

Thm. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\xlongequal{z=re^{i\theta}}u(r\cos\theta,r\sin\theta)+iv(r\cos\theta,r\sin\theta)$

记作 $f(z)=\varphi(r,\theta)+i\psi(r,\theta)$，$f(z)$ 在 $z=x+iy\,(=re^{i\theta})$ 可微 $\Longleftrightarrow$

$\varphi(r,\theta),\psi(r,\theta)$ 在 (r,θ) 可微且满足：

$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$，$\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$

且 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+i\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=(\cos\theta-i\sin\theta)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+i\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$

Pf. (1) $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 可微 $\Longleftrightarrow$ $\varphi(r,\theta)$ 与 $\psi(r,\theta)$ 可微

(2) $\varphi(r,\theta)=u(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\psi(r,\theta)=v(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}=u_x(-r\sin\theta)+u_y(r\cos\theta)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=v_x\cos\theta+v_y\sin\theta,\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}=v_x(-r\sin\theta)+v_y(r\cos\theta)$$

易知 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\\ \frac{\partial\psi}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\end{cases}$

(3) $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}+i\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)$$

$$=(\cos\theta-i\sin\theta)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+i\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

2. $w_k=(\sqrt[n]{z})_k$ 的解析性

Cor. $w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}$ 在去掉支割线的区域上单叶解析.

Pf. 记 $w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}$

(1) 前面已证：每个分支函数都单叶

(2) 下面用 Thm. 证明解析：

$$w_k=\sqrt[n]{r}\,e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}=\sqrt[n]{r}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sqrt[n]{r}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}$$

$$=\varphi(r,\theta)+i\psi(r,\theta)$$

易知，$\varphi(r,\theta)$ 与 $\psi(r,\theta)$ 在定义域上可微.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}-1}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n},\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=r^{\frac{1}{n}}\left(-\frac{1}{n}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}-1}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n},\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}=r^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}$$

显然成立：$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$，$\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$，则$w_k$解析：

$$\frac{dw_k}{dz}=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+i\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=\frac{r}{z}\left(\frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}-1}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}-1}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{nz}\left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sqrt[n]{r}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)=\frac{w_k}{nz}$$

例1 已知z平面去掉负实轴后多值函数$w=\sqrt[3]{z}$分出三个解析分支. 若某一支满足$w_k(i)=-i$，求$w_k(-i)$.

Sol. $w_k=w_k(z)=\sqrt[3]{|z|}\,e^{\frac{\theta+2k\pi}{3}i}$，$k=0,1,2$

$w_k(i)=\sqrt[3]{|i|}\,e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}i}=e^{\frac{3\pi}{2}i}$，解得$k=2$

$w_2(-i)=\sqrt[3]{|i|}\,e^{\frac{-\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}i}=e^{\frac{7\pi}{6}i}$

例2 已知z平面去掉正实轴后多值函数$w=\sqrt[3]{z}$分出三个分支，若某一支满足$w_k(i)=-i$，求$w_k(-i)$.

Sol. $w_k=w_k(z)=\sqrt[3]{|z|}\,e^{\frac{\theta+2k\pi}{3}i}$，$k=0,1,2$

$w_k(i)=\sqrt[3]{|i|}\,e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}i}=e^{\frac{3\pi}{2}i}$，解得$k=2$

$w_2(-i)=e^{\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{3}i}=e^{\frac{11\pi}{6}i}$

四、对数函数的单叶解析分支

1. 定义

Def. 指数函数$z=e^w$的反函数$w=\mathrm{Ln}\,z$.

记$z=re^{i\theta}=|z|e^{i\theta}$，$w=u+iv$，$|z|e^{i\theta}=e^{u+iv}=e^u e^{iv}$

$e^u=|z|=r\Rightarrow u=\ln|z|=\ln r$，$v=\theta+2k\pi$

对数函数：$w=\mathrm{Ln}\,z=\ln r+i(\theta+2k\pi)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

记$\ln z=\ln r+i\theta$为主值支

例如 $\mathrm{Ln}(-1)=\ln 1+i(\pi+2k\pi)=i(2k+1)\pi$

$\ln(-1)=\pi i$

$\mathrm{Ln}(i)=\ln 1+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)=i(2k+\frac{1}{2})\pi$，

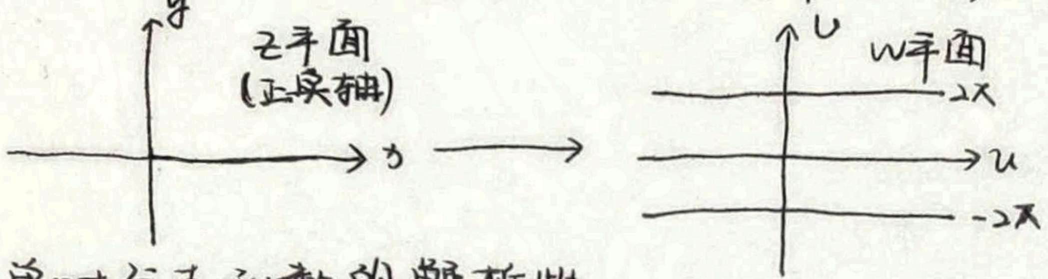
$Ln(3) = \ln 3 + i\cdot 2k\pi$

Rem. Ln 0 无意义

2. 对数函数的对应关系和单叶分支

z平面上从原点出发的射线对应原像是宽为2kπ的水平直线. 进而, z平面去掉一条原点出发的射线所成区域在变换原像是宽为2π的水平带型域. 这样, 多值对数函数 $w = Ln\, z$ 可分出单叶分支: $w_k = (Ln\, z)_k = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

根据支点定义, $z=0$, $z=\infty$ 是对数函数 $w = Ln\, z$ 的两个支点, 支割线是连接 $z=0$ 和 $z=\infty$ 的简单曲线, 例如:



3. 单叶分支函数的解析性

Cor. 对数函数 $w = Ln\, z$ 的单叶分支函数在定义域上解析.

Pf. $W_k = (Ln\, z)_k = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \cdots$

$\varphi(r,\theta) = \ln r$, $\psi(\theta, r) = \theta + 2k\pi$

显然 $\varphi(r,\theta)$, $\psi(r,\theta)$ 可微且满足 C-R 条件, 故 $W_k(z)$ 解析.

五、其他多值函数简介

1. 幂函数

Def. $w = z^{\alpha} = e^{\alpha Ln\, z}$ $(\alpha \neq 0)$

(1) $\alpha = n$, $n \in N^+$, $w = z^n$ 是单值函数.

(2) $\alpha = \frac{n}{m}$, $n, m \in N^+$ 且 n, m 既约, $w = z^{\frac{n}{m}} = (z^n)^{\frac{1}{m}}$ 是m多值函数

(3) α非有理数时，$w=z^\alpha$是无穷多值函数，例如：

$w=z^i$，$w=z^\pi$

2. 指数函数

Def. $w=a^z=e^{z\,\mathrm{Ln}\,a}$ ($a\neq 0$, ...)，$w=e^{z[\ln|a|+(\theta_0+2k\pi)i]}$

$w=a^z$是无穷多值函数，特别地，$a=e$时也是无穷多值

前面各函数定义时所用$e^z=e^{x+iy}$是主值支。

*3. 反三角函数

Rem. 对数函数的导数：

$$\frac{dw_k}{dz}=\frac{d}{dz}\left((\mathrm{Ln}\,z)_k\right)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial}{\partial r}(\ln r)+i\frac{\partial}{\partial r}(\theta+2k\pi)\right)=\frac{1}{z}$$